

ВОЗМОЖНО ЛИ СЛАБОЕ НАРУШЕНИЕ ПРИНЦИПА ПАУЛИ?

ИГНАТЬЕВ А. Ю., КУЗЬМИН В. А.

ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ АН СССР

(Поступила в редакцию 28 августа 1986 г.)

Рассмотрен вопрос о существовании моделей, допускающих слабое нарушение принципа Паули. Построена простейшая алгебра операторов рождения – уничтожения, содержащая параметр β и описывающая слабое нарушение принципа Паули (так что при $\beta=0$ принцип Паули соблюдается абсолютно точно). Коммутационные соотношения в этой алгебре оказываются трилинейными. Описана модель, основанная на данной алгебре и допускающая переходы с нарушением принципа Паули, вероятность которых подавлена величиной β^2 (хотя гамильтониан взаимодействия не содержит малых параметров).

Вопрос о возможном нарушении (разумеется, весьма малом) фундаментальных принципов физики, начиная с пионерских работ о несохранении четности в слабых взаимодействиях, стал объектом пристального внимания как теоретиков, так и экспериментаторов.

В последнее время широко исследовалось возможное несохранение таких квантовых чисел, как лептонные числа и барионный заряд. Несохраниение этих чисел может быть описано в рамках моделей, удовлетворяющих всем принципам стандартной квантовой теории поля (лоренц-инвариантность, причинность и т. п.). Такими моделями являются, например, хорошо известные теории Великого объединения.

Меньше работ было посвящено возможному несохранению электрического заряда [1, 2], нарушению CPT -симметрии [3] и лоренц-инвариантности [4]. Построение моделей, описывающих нарушения этого типа, по-видимому, связано с радикальной перестройкой теории.

Принцип запрета Паули также относится к числу фундаментальных принципов квантовой теории. Возможность его малого нарушения обсуждалась в работе [5]. Однако по своей природе он существенно отличается от тех фундаментальных законов, которые связаны с наличием некоторой (дискретной или непрерывной) симметрии. Выполнение этих законов связано со специальным видом (инвариантностью) лагранжиана (и вакуума), тогда как справедливость принципа Паули обусловлена специальным видом коммутационных соотношений. Поэтому смысл понятия «слабое нарушение принципа Паули» далеко не очевиден и, вероятно, неоднозначен. Подчеркнем сразу же, что речь идет не о том, что наряду с ферми-статистикой могут существовать другие типы статистик (например, парастатистика [6] или «интерполирующая статистика» [7]). Нас интересует возможность того, что в «настоящей» теории существует некий безразмерный параметр β , такой, что при $\beta=0$ принцип Паули выполняется абсолютно точно, а при $\beta \neq 0$ возможны процессы, идущие с нарушением этого принципа (подавленные, скажем, степенным образом по β), например переход атомного электрона в состояние, уже занятое другим электроном.

Своеобразие рассматриваемого здесь случая заключается в том, что вопрос о выборе параметра β является далеко не тривиальным, поскольку для ответа на него требуется по существу построение некоторой модели, описывающей нарушение принципа Паули, которое исчезает при $\beta \rightarrow 0$. Попытки построения такого рода моделей, насколько известно авторам, до сих пор не предпринимались.

Интерес к таким моделям вызывается не только традиционной мотивировкой «почему нет», но также и тем обстоятельством, что на опыте нарушение принципа Паули проявлялось бы в тех же самых экспериментах,

которые предназначены для поиска нестабильности электрона. (Как в том, так и в другом случае происходит испускание жесткого γ -кванта при переходе электрона с верхнего уровня на K -оболочку.)

Поясним, почему возможность слабого нарушения принципа Паули не запрещается общими теоремами квантовой теории поля о связи спина со статистикой. В аксиоматической теории поля [8] доказывается следующая теорема о связи спина со статистикой:

Пусть $\psi(x)$ — комплексное поле, преобразующееся по произвольному неприводимому представлению $D(j/2, k/2)$ группы $SL(2, C)$. Тогда, если

$$\psi_\beta(x) \psi_\beta^*(y) = -(-1)^{j+k} \psi_\beta^*(y) \psi_\beta(x)$$

при $(x-y)^2 < 0$, то $\psi_\beta(x) = 0$.

Таким образом, эта и аналогичные ей теоремы запрещают квантовать поля с полуцелым спином по Бозе (т. е. с помощью коммутаторов). Но эта теорема отнюдь не исключает всех остальных способов квантования полей с полуцелым спином. В частности, вопрос о существовании такого способа квантования, который приводил бы к слабому нарушению принципа Паули, эта теорема оставляет открытым.

Справедливость принципа Паули автоматически вытекает из вида перестановочных соотношений между операторами электронно-позитронного поля $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, или, что эквивалентно, между операторами рождения и уничтожения электронов и позитронов $a_{ks}, a_{ks}^+, b_{ks}, b_{ks}^+$. Поэтому в теории, описывающей нарушение этого принципа, перестановочные соотношения должны быть изменены. Априори неясно, в каком виде следует выбрать новые коммутационные соотношения. Вообще говоря, для решения этого вопроса можно было бы рассуждать следующим образом. Будем рассматривать различные наборы перестановочных соотношений между полями $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ наиболее общего вида:

$$\sum_{ij} C_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m}^{(q)} \psi(x_{i_1}) \dots \psi(x_{i_n}) \bar{\psi}(y_{j_1}) \dots \bar{\psi}(y_{j_m}) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

причем следует рассматривать не только билинейные соотношения, но также и соотношения более высокой степени (трилинейные и т. д.); каждый набор включает в себя не одно, а несколько (k) независимых соотношений. Далее, следует потребовать, чтобы эти соотношения удовлетворяли ряду общих принципов квантовой теории поля: положительности энергии, лоренц-инвариантности, релятивистской причинности, сохранению электрического заряда (фермионного числа), C -четности. Что касается последних четырех принципов, то следует требовать не абсолютно точного, а приближенного их соблюдения: их нарушение не должно превышать величин порядка $O(\beta)$ (где β — параметр, характеризующий нарушение принципа Паули), чтобы при $\beta \rightarrow 0$ все нарушения становились пренебрежимо малыми.

Таким образом, можно было бы найти все допустимые коммутационные соотношения (или убедиться в их отсутствии), содержащие малый параметр β , и приводящие в пределе $\beta \rightarrow 0$ к обычной ферми-статистике электронов.

Этот путь, однако, представляется довольно громоздким. Более простой способ состоит в следующем. Вместо того чтобы искать алгебру операторов, попробуем сначала построить представление этой алгебры, обладающее требуемым свойством, а уж затем найдем сами коммутационные соотношения. При этом удобно работать с операторами рождения и уничтожения. Упростим еще задачу, отбросив импульсные и спиновые переменные и рассматривая только электронные операторы ¹⁾.

Итак, надо найти представление операторов рождения и уничтожения a, a^+ , зависящее от параметра β и при $\beta \rightarrow 0$ переходящее в обычное пред-

¹⁾ В настоящей работе будет рассмотрена лишь эта упрощенная постановка задачи. При этом проблемы причинности, лоренц-инвариантности и сохранения электрического заряда вообще не возникают. Более полное рассмотрение будет проведено в отдельной работе.

$$a_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_F^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

(В качестве ортонормированного базиса здесь выбран вакуум $|0\rangle$ и одночастичное состояние $|1\rangle$.) Минимальная размерность искомого пространства состояний, очевидно, равна трем. Выберем в качестве базиса: вакуум $|0\rangle$, одночастичное $|1\rangle$ и двухчастичное $|2\rangle$ состояния²⁾. Предположим, что действие операторов рождения и уничтожения определяется следующим образом (параметр β считаем вещественным):

$$\begin{aligned} a^+|0\rangle &= |1\rangle, & a^+|1\rangle &= \beta|2\rangle, & a^+|2\rangle &= 0, \\ a|0\rangle &= 0, & a|1\rangle &= |0\rangle, & a|2\rangle &= \beta|1\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Гильбертово пространство состояний H можно разложить на прямую сумму подпространств H_2 (натянута на векторы $|0\rangle, |1\rangle$) и H_1 (натянута на вектор $|2\rangle$). Ясно, что при $\beta=0$ переходы между состояниями из H_2 и H_1 становятся запрещенными, так что пространство H_1 полностью отщепляется от H_2 .

Приступим теперь к нахождению коммутационных соотношений (т.е. алгебры), которым удовлетворяют операторы a, a^+ . Для этого нужно вычислить всевозможные произведения операторов a, a^+ вида a^2, a^+a, aa^+, a^3 и т.д. и найти соотношения между ними (такие соотношения обязательно должны возникнуть, поскольку существует лишь девять независимых матриц 3×3). Можно показать, что произведения операторов a, a^+ не выше второй степени линейно независимы, т.е. билинейные коммутационные соотношения в данной модели отсутствуют.

Линейное девятимерное пространство L матриц 3×3 можно разложить на прямую сумму трехмерного пространства L_d (диагональные матрицы) и шестимерного пространства L_o (матрицы с нулевыми диагональными элементами). Пространство L_d содержит два независимых оператора a^+a и aa^+ , а пространство L_o — десять операторов ($a, a^2, a^2a^+, aa^+a, a^+a^2$ плюс их эрмитово-сопряженные). Поэтому в пространстве L_o должно существовать четыре независимых линейных соотношения между операторами. Эти соотношения можно записать, например, в следующем виде:

$$a^2a^+ + \beta^2a^+a^2 = \beta^2a, \quad (4)$$

$$a^2a^+ + \beta^4a^+a^2 = \beta^2aa^+a \quad (5)$$

плюс их эрмитово-сопряженные. К этим соотношениям надо еще добавить равенства

$$a^3 = 0, \quad (a^+)^3 = 0. \quad (6)$$

Итак, равенства (4)–(6) образуют искомую алгебру, которой удовлетворяют операторы рождения и уничтожения.

Построим теперь выражение для оператора числа частиц N в данной модели. В выбранном представлении оператор N имеет вид

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

причем выполняются обычные коммутационные соотношения

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^+] = a^+. \quad (8)$$

Будем искать выражение для N в терминах операторов рождения и уничтожения в виде

$$N = A_1a^+a + A_2aa^+ + A_3. \quad (9)$$

²⁾ Эти названия будут оправданы в дальнейшем после построения оператора числа частиц N .

Можно показать, что значения коэффициентов равны

$$A_1 = \frac{-1+2\beta^2}{1-\beta^2+\beta^4}, \quad A_2 = \frac{-2+\beta^2}{1-\beta^2+\beta^4}, \quad A_3 = \frac{2-\beta^2}{1-\beta^2+\beta^4}. \quad (10)$$

Построенная алгебра оказалась трилинейной по операторам рождения и уничтожения. Можно показать (см. Приложение), что билинейной алгебры, обладающей требуемым свойством (т. е. малым нарушением принципа Паули), построить нельзя.

Теперь рассмотрим различные представления данной алгебры. При построении представлений будут существенно использованы коммутационные соотношения оператора числа частиц с операторами рождения и уничтожения (18), поэтому заметим, что эти соотношения следуют непосредственно из алгебры (4)–(6), а не связаны с выбором конкретного представления (3).

При $\beta \neq 0$ алгебра (4)–(6) не имеет двумерных представлений: если же $\beta = 0$, то имеется двумерное представление

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

совпадающее с двумерным представлением обычной алгебры ферми-операторов.

Для рассмотрения динамики в нашей модели выберем гамильтониан в виде

$$H = H_0 + H_{int} = EN + \varepsilon V, \quad (12)$$

где N — оператор числа частиц, V — энергия взаимодействия:

$$V = a^2 a^+ + a^+ a^2 + a a^+ a + \text{э.с.}, \quad (13)$$

E и ε — параметры размерности энергии, имеющие смысл энергии одночастичного состояния и константы связи соответственно. Для удобства дальнейшего применения теории возмущений предполагаем, что $\varepsilon \ll E$. Отметим, что помимо отношения ε/E , гамильтониан (12) не содержит явно никаких других малых параметров.

Выбор гамильтониана в виде (12) представляется естественным, хотя, разумеется, далеко не единственным.

Данный гамильтониан приводит к осцилляциям между состояниями $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$. Вероятности осцилляций в низшем приближении теории возмущений даются выражениями

$$W_{01} = 2 \frac{\varepsilon^2}{E^2} (1 - \cos Et), \quad W_{02} = 0, \quad W_{12} = 2\beta^2 \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^2 (1 - \cos Et). \quad (14)$$

Из (14) видно, что вероятности переходов, нарушающих принцип Паули (W_{02} и W_{12}), подавлены как минимум фактором β^2 и при $\beta = 0$ обращаются в нуль.

Итак, нами рассмотрен вопрос о теоретическом описании возможности малых отклонений от принципа запрета Паули. Найден простейший вид коммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения, позволяющий описать слабое нарушение принципа запрета. Показано (см. Приложение), что эти коммутационные соотношения не могут быть билинейными по операторам рождения и уничтожения, а должны быть как минимум трилинейными. Указанный способ построения простейшей операторной алгебры, описывающей нарушение принципа Паули, допускает обобщение на более реалистические случаи. Динамические модели, построенные на основе такой алгебры, обладают следующим характерным свойством: несмотря на отсутствие малого параметра в гамильтониане взаимодействия, переходы с нарушением принципа Паули оказываются подавленными. Степень этого подавления определяется величиной малого параметра, входящего в коммутационные соотношения.

Авторы благодарны В. А. Березину, Н. Г. Козимирову, В. А. Матвееву, В. А. Рубакову, А. Н. Тавхелидзе, И. И. Ткачеву, М. Е. Шапошникову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Можно показать, что нарушение принципа Паули нельзя описать с помощью алгебры, определяемой билинейными коммутационными соотношениями. Точнее говоря, справедлива следующая теорема (ее доказательство, за неимением места, опускаем).

Теорема. Пусть операторы a , a^+ удовлетворяют билинейному коммутационному соотношению вида

$$C_1 a^+ a + C_2 a a^+ + C_3 \cdot 1 + C_4 a + C_5 a^+ + C_6 a^2 + C_7 (a^+)^2 = 0.$$

Пусть, кроме того, существует эрмитов оператор N , удовлетворяющий коммутационным соотношениям вида

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^+] = a^+$$

и имеющий в качестве собственных значений числа $0, 1, \dots, n-1$.

Тогда для любого конечномерного представления операторов a , N имеет место равенство $a^2 = 0$.

Литература

1. Ignatiev A. Yu., Kuzmin V. A., Shaposhnikov M. E. Preprint P-0401. M.: IYaI, 1978; Phys. Lett. 1979. V. 84B. P. 315; Preprint P-0142. M.: IYaI, 1980.
2. Okun L. B., Zeldovich Ya. B. // Phys. Lett. 1978. V. 78B. P. 597.
3. Banks T. SLAC-PUB-3376. Stanford, 1984.
4. Nielsen H. B., Ninomiya M. // Nucl. Phys. 1978. V. 141B. P. 153.
5. Kuzmin V. A. // Proc. Third Seminar Quantum Gravity./Ed. Markov M. A. et al. Singapore: World Scientific, 1984. P. 270; Nordita preprint 85/4. Copenhagen, 1985.
6. Волков Д. В. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1560. Govorkov A. B. // Intern. J. Theor. Phys. 1973. V. 7. P. 49. Каплан И. Г. // УФН. 1975. Т. 117. С. 691.
7. Wilcheck F., Zee A. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2250.
8. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.

IS SMALL VIOLATION OF THE PAULI PRINCIPLE POSSIBLE?

IGNATIEV A. Yu., KUZMIN V. A.

The question considered in the work is whether there are models which can account for small violation of the Pauli principle. A simple algebra is constructed for the creation-annihilation operators, which contains a parameter β and describes small violation of the Pauli principle (the Pauli principle is valid exactly for $\beta=0$). The commutation relations in this algebra are trilinear. A model is presented, basing upon this commutator algebra, which allows transitions violating the Pauli principle, their probability being suppressed by a factor of β^2 (even though the Hamiltonian does not contain small parameters).